

Exercices d'oraux de la banque CCP 2014-2015

11 exercices d'analyse sur les 58 peuvent être traités en Maths Sup.

BANQUE ANALYSE

EXERCICE 1

1) On considère deux suites numériques $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $u_n \sim_{+\infty} v_n$.

Démontrer que u_n et v_n sont de même signe à partir d'un certain rang.

2) Déterminer le signe, au voisinage de l'infini, de $\operatorname{sh}\left(\frac{1}{n}\right) - \tan\left(\frac{1}{n}\right)$.

EXERCICE 2 (la question 2) est modifiée)

On pose $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2(3-x)}$

1) Décomposer $f(x)$ en éléments simples et en déduire la primitive G définie sur l'intervalle $] -1, 3[$ telle que $G(1) = 0$.

2) Pour tout entier naturel n , donner le développement limité de la fonction f à l'ordre n en 0.

3) En déduire $G^{(3)}(0)$.

EXERCICE 3

1) On pose $g(x) = e^{2x}$ et $h(x) = \frac{1}{1+x}$.

Calculer pour tout entier naturel k , la dérivée d'ordre k des fonctions g et h sur leurs ensembles de définition respectifs.

2) On pose $f(x) = \frac{e^{2x}}{1+x}$.

En utilisant la formule de LEIBNIZ, concernant la dérivée $n^{\text{ème}}$ d'un produit de fonctions, déterminer, pour tout entier naturel n et pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, la valeur de $f^{(n)}(x)$.

3) Démontrer, dans le cas général, la formule de LEIBNIZ, utilisée dans la question précédente.

EXERCICE 4

1) Énoncer le théorème des accroissements finis.

2) Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in]a, b[$.

On suppose que f est continue sur $[a, b]$ et que f est dérivable sur $]a, x_0[$ et sur $]x_0, b[$.

Démontrer que, si f' admet une limite en x_0 , alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$.

3) Prouver que l'implication : (f est dérivable en x_0) $\implies$ (f' admet une limite finie en x_0) est fausse.

Indication : on pourra considérer la fonction g définie par : $g(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 0$.

EXERCICE 5

1) On considère la série de terme général $u_n = \frac{1}{n (\ln n)^\alpha}$ où $n \geq 2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Cas $\alpha \leq 0$.

En utilisant une minoration très simple de u_n , démontrer que la série diverge.

(b) Cas $\alpha > 0$.

Étudier la nature de la série.

Indication : on pourra utiliser la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{x (\ln x)^\alpha}$.

2) Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 3} \frac{\left(e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right) e^{\frac{1}{n}}}{(\ln(n^2 + n))^2}$.

EXERCICE 7

- 1) Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels positifs. Montrer que :

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \implies \sum u_n \text{ et } \sum v_n \text{ sont de même nature.}$$

- 2) Etudier la convergence de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{(i-1) \sin\left(\frac{1}{n}\right)}{(\sqrt{n+3}-1) \ln n}$.

(i est ici le nombre complexe de carré égal à -1)

EXERCICE 42

On considère les deux équations suivantes :

$$2xy' - 3y = 0 \quad (H)$$

$$2xy' - 3y = \sqrt{x} \quad (E)$$

- 1) Résoudre l'équation (H) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
2) Résoudre l'équation (E) sur l'intervalle $]0, +\infty[$ puis sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

EXERCICE 43

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On définit la suite (u_n) par $u_0 = x_0$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \text{Arctan}(u_n)$.

- 1) (a) Démontrer que la suite (u_n) est monotone et déterminer, en fonction de la valeur x_0 , le sens de variation de (u_n) .
(b) Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.
2) Déterminer l'ensemble des fonctions h continues sur $\mathbb{R}$ telles que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = h(\text{Arctan } x)$.

EXERCICE 47

- 1) Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$.

(a) Quel est le sens géométrique de la somme de RIEMANN $R_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$?

(b) Démontrer, lorsque f est de classe C^1 sur $[0, 1]$, que $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(f) = \int_0^1 f(x) dx$.

- 2) Déterminer la limite de la suite (x_n) définie par $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{3n^2 + k^2}$.

EXERCICE 55

Soit a un nombre complexe.

On note E l'ensemble des suites à valeurs complexes telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2au_{n+1} + 4(ia - 1)u_n \text{ avec } (u_0, u_1) \in (\mathbb{C})^2.$$

- 1) Prouver que E est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites à valeurs complexes. Déterminer, en le justifiant, la dimension de E .
2) Dans cette question, on considère la suite de E définie par : $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$. Exprimer, pour tout entier naturel n , le nombre complexe u_n en fonction de n .
Indication : discuter suivant les valeurs de a .

EXERCICE 56

On considère la fonction H définie sur $]1, +\infty[$ par $H(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$.

- 1) Montrer que H est C^1 sur $]1, +\infty[$ et calculer sa dérivée.
- 2) Montrer que la fonction u définie par $u(x) = \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}$ admet une limite finie en $x = 1$.
- 3) En utilisant la fonction u de la question 2), calculer la limite en 1^+ de la fonction H .